MATERIAL DE APOIO – Integrais

Éliton Fontana

Fábio César Menslin Júnior

1 Definições

1.1 Integral indefinida

Uma integral é dita indefinida quando não se conhece os limites de integração, ou seja, o intervalo no qual ela está sendo integrada.

Exemplo:

$$\int \boldsymbol{f(x)\,dx = F(x) + C}$$

Na integração indefinida, a função resultante será a função integrada F(x), sendo necessário somá-la a uma constante, chamada de constante de integração. Neste trabalho C será sempre tratada como a constante de integração e k sempre será uma constante qualquer que venha a aparecer.

1.2 Integral definida

Diferentemente da integral indefinida, os limites da integral definida já estão estabelecidos, para resolvê-la, basta encontrar a integral da função em questão, e neste resultado substituir os valores dos limites superior e inferior.

Exemplo:

$$\int_{\boldsymbol{A}}^{\boldsymbol{B}} \boldsymbol{f(x)\,dx = F(X) + C|_{A}^{B} = (F(B) + C) - (F(A) + C)}$$

Como as constantes de integração são iguais, a integral definida é a subtração das funções primitivas substituídas pelos limites superior e inferior, neste caso (B e A respectivamente). Resultando em:

$$\int_{A}^{B} f(x)\, dx = F(B) - F(A)$$

2 Propriedades Básicas

2.1 Soma e Subtração

Qualquer soma ou subtração de funções, que estejam dentro da integral, pode ser separada como a soma/subtração individual da integral de cada função.

$$\int \big(f(x) \pm g(x)\big) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

Exemplo:

$$\int (x^2 + 3x - 2)\, dx$$

$$\int (x^2 + 3x - 2) dx = \int x^2 dx + \int 3x\, dx - \int 2\, dx$$

Agora basta resolver individualmente cada uma das integrais obtendo-se:

$$\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 2x + C = F(x)$$

2.2 Constantes

Qualquer constante que multiplique a função dentro da integral, é equivalente a multiplicação da integral pela mesma constante.

$$\int k f(x) dx = k \int f(x) dx$$

Exemplo:

$$\int \frac{(x^2 + 3x - 2)}{x}\, dx$$

$\int \frac{(x^2 + 3x - 2)}{x} dx =$ $\int \frac{x^2}{x} dx + \int \frac{3x}{x}\, dx - \int \frac{2}{x}\, dx =$ $\int x\, dx + \int 3\, dx - \int \frac{2}{x}\, dx$	Semelhante ao exemplo anterior podemos separar a integral na soma/subtração de integrais. E simplificar o que for possível.

Percebe-se que 3 e 2 são constantes multiplicando uma função f(x), para o caso de 3, $f(x) = 1$ e para 2, $f(x) = \frac{1}{x}$. Portanto podemos tirá-los da integral resultando em:

$$\int x\, dx + \int 3\, dx - \int \frac{2}{x}\, dx = \int x\, dx + 3\int dx - 2\int \frac{1}{x}\, dx$$

Resolvendo-se individualmente cada integral obtemos que:

$$F(x) = \frac{x^2}{2} + 3x - 2ln(x) + C$$

3 Métodos para resolução de integrais

3.1 Método por substituição de variável

O método por substituição de variável consiste em transformar uma integral desconhecida em uma integral direta e mais fácil de ser resolvida, a partir da substituição da variável independente em uma nova váriavel.

Exemplo:

$$\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx$$

$u = x^2 + 1$ $\frac{du}{dx} = 2x \rightarrow du = 2x\,dx$	Inicialmente escolhemos uma das funções presentes na integral. Neste caso foi escolhido $x^2 + 1$ e dissemos que uma variável qualquer u assume os valores desta função. Além disso, derivamos esta função para obter a dependência dessa com as variações em dx.
$\int \frac{2x}{x^2+1}dx \rightarrow \int \frac{du}{u}$	Com os valores obtidos anteriormente podemos substituir na integral desejada.

A integral obtida é uma integral direta, que pode facilmente ser resolvida ao olhar para a tabela de integrais. Resultando em:

$\int \frac{du}{u} = ln(u) + C$	Resolvida a integral, basta substituir todos os lugares com a variável u, pela função que foi atribuída a ela, neste caso $x^2 + 1$. Resultando em:

$$F(x) = \ln(x^2+1) + C$$

3.2 Método por partes

O método de integração por partes vem da derivação de uma multiplicação de funções. Abaixo mostra-se o desenvolvimento da derivação de duas funções.

Desenvolvimento:

Dadas duas funções: g(x) e f(x). A derivada da multiplicação de g(x)f(x) será dada pela fórmula abaixo (não vou entrar nos méritos da demonstração pela definição de derivada).

$$\boldsymbol{\frac{d(g * f)}{dx} = \frac{d(g)}{dx} f + \frac{d(f)}{dx} g}$$

Integrando ambos os lados:

$$\boldsymbol{\int \frac{d(g * f)}{dx} dx = \int \frac{d(g)}{dx} f\, dx + \int \frac{d(f)}{dx} g\, dx}$$

A integral da derivada $\int \frac{d(g*f)}{dx} dx$ resulta diretamente na multiplicação de g(x)f(x). Rearranjando os termos e isolando uma das integrais obtém-se:

$$\boldsymbol{g * f - \int \frac{d(g)}{dx} f\, dx = \int \frac{d(f)}{dx} g\, dx}$$

Com isso o desenvolvimento da integração por partes é finalizado, a ideia é separar uma multiplicação de funções e torná-las em uma derivada mais simples de se resolver. O exemplo a seguir vai ilustrar este tipo de integração.

Exemplo:

$$\int \boldsymbol{xsen(x)\,dx}$$

$$\boldsymbol{g(x) = x \;\rightarrow \frac{d(g)}{dx} = 1}$$

$$\boldsymbol{\frac{d(f)}{dx} = sen\,(x) \;\rightarrow f(x) = \; -cos(x)}$$

Percebe-se a integral é uma multiplicação de funções, logo o método de integral por partes pode ser aplicado. Neste caso escolhemos uma função para ser $\boldsymbol{g(x)}$ e outra como $\boldsymbol{\frac{d(f)}{dx}}$

$$\boldsymbol{g * f - \int \frac{d(g)}{dx} f\,dx = \int \frac{d(f)}{dx} g\,dx}$$

$$\boldsymbol{-xcos(x) - \int -cos(x)\,dx}$$

$$\boldsymbol{= \int xsen(x)\,dx}$$

Com as funções obtidas, basta substituir na fórmula da integral por partes.

Percebemos que com a integral por partes, sobrou apenas uma integral simples para se resolver, $\int -\boldsymbol{\cos(x)\,dx.}$

$$\boldsymbol{-xcos(x) + \; sen\,(x) + C}$$

$$\boldsymbol{= \int xsen(x)\,dx}$$

Com a integral resolvida, indiretamente obteve-se a resposta para $\int \boldsymbol{xsen(x)dx.}$

$$\boldsymbol{F(x) = sen(x) - xcos(x)} + C$$

3.3 Método por frações parciais

Por fim, o último método de integração a ser abordado é o método de frações parciais. Como o próprio nome implica, o método busca reduzir uma integral que parece complexa, em um somatório de frações de simples integração. Antes serem feitos exemplos, é necessário lembrar de dois conceitos.

Multiplicidade de uma raiz: A multiplicidade de uma raiz se deve a quantas vezes ela pode ser resposta de um polinômio p(x) = 0.

Exemplo: $p(x) = x^3$, neste caso, 0 é raiz de multiplicidade 3 da equação p(x), pois serve como resposta 3 vezes. (veja que podemos escrever x^3 como $x.x.x$.

Outro exemplo: $\boldsymbol{p(x) = (x-3)^2(x-2)^3(x+3)}$**,** neste caso, podemos ver que 3 será resposta duas vezes, 2 será resposta três vezes e -3 será resposta uma vez. Portanto 3 é raiz de multiplicidade dois, 2 é raiz de multiplicidade três e -3 é raiz de multiplicidade 1.

Fatoração de polinômios: A fatoração de polinômios visa reduzir um polinômio a uma multiplicação de fatores.

Exemplo: $\boldsymbol{p(x) = x^2 - 4x + 3}$**,** este polinômio pode ser reduzido como $\boldsymbol{p(x) = (x-3)(x-1)}$**.**

Vamos agora, aplicar estes conhecimentos na integração por partes.

Exemplo:

$$\int \frac{\boldsymbol{x}^2 - \mathbf{3}}{(\boldsymbol{x}-\mathbf{3})^2(\boldsymbol{x}-\mathbf{1})}\,\boldsymbol{dx}$$	
$(\boldsymbol{x}-\mathbf{3})^2 \rightarrow multiplicidade\ 2$ $(\boldsymbol{x}-\mathbf{1}) \quad \rightarrow multiplicidade\ 1$	Passo 1: Fatorar (já está fatorado) e definir a multiplicidade das raízes
$$\int \frac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{x}-\mathbf{3}} + \frac{\boldsymbol{B}}{(\boldsymbol{x}-\mathbf{3})^2} + \frac{\boldsymbol{C}}{\boldsymbol{x}-\mathbf{1}}\,\boldsymbol{dx}$$	Passo 2: Assumir que a soma de frações parciais, gera a função final. **Note que:** devido a multiplicidade de (x-3) ser 2, ela aparece duas vezes na soma.
$$\int \frac{\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}-\mathbf{3})(\boldsymbol{x}-\mathbf{1}) + \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}-\mathbf{1}) + \boldsymbol{C}(\boldsymbol{x}-\mathbf{3})^{\mathbf{2}}}{(\boldsymbol{x}-\mathbf{3})^{\mathbf{2}}(\boldsymbol{x}-\mathbf{1})}\,\boldsymbol{dx}$$	Passo 3: Faz-se a soma das frações, para determinar A, B e C.
$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^2 - 4Ax + 3A + B\boldsymbol{x} - \boldsymbol{B} + C\boldsymbol{x}^2 - \mathbf{6}\boldsymbol{C}\boldsymbol{x} + \mathbf{9}\boldsymbol{C} = \boldsymbol{x}^2 - \mathbf{3}$ $\begin{cases} A + C = 1\ (comparando\ com\ x^2) \\ -4A + B - 6C = 0\ (comparando\ com\ x) \\ 3A - B + 9C = -3\ (comparando\ com - 2) \end{cases}$	Passo 4: Igualam-se os numeradores do método com a função inicial, e assim por comparação podemos montar um sistema
$A = \frac{3}{2};\ B = 3;\ C = -\frac{1}{2};$ $\int \frac{\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}}{\boldsymbol{x}-\mathbf{3}} + \frac{\mathbf{3}}{(\boldsymbol{x}-\mathbf{3})^2} + \frac{-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}}{\boldsymbol{x}-\mathbf{1}}\,\boldsymbol{dx}$	Passo 5: Resolvendo o sistema obtemos as constantes e substituindo na integral anterior

$$\frac{3}{2}\int \frac{1}{x-3}dx + 3\int \frac{1}{(x-3)^2}dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}dx$$

Passo 6: Aplicando a propriedade de soma e de multiplicação por uma constante podemos separar as integrais em:

Agora a resolução do problema se tornou bastante simplificada, bastando resolver individualmente cada uma das integrais apresentadas.

$$F(x) = \frac{3}{2}\boldsymbol{ln(x-3)} - 3\left(\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{x-3}}\right) - \frac{1}{2}\boldsymbol{ln(x-1)} + \boldsymbol{C}$$

Método dos resíduos para frações parciais

Além do método mostrado acima, outro método é possível de ser usado, aqui apresentarei o caso para quando todas as raízes do denominador tem multiplicidade 1. Caso maior multiplicidade (como no exemplo acima), a fórmula para calcular os numeradores é extensa e trabalhosa.

Legenda:

$$A_n \rightarrow \ coeficiente\ no\ índice\ n$$

$$r_n \rightarrow \ raiz\ no\ índice\ n$$

Após fatorar a equação. Obtemos de forma genérica o seguinte polinômio.

$$H(x) = \frac{Ax^m + Bx^{m-1} \dots + Cx + D}{(x-r_n)(x-r_{n-1}) \dots (x-r_2)(x-r_1)}$$

É possível escrevê-lo em frações parciais como apresentado abaixo:

$$P(x) = \frac{A_n}{x - r_n} + \frac{A_{n-1}}{x - r_{n-1}} + \cdots + \frac{A_3}{x - r_3} + \frac{A_2}{x - r_2} + \frac{A_1}{x - r_1}$$

Os coeficientes deste polinômio podem ser calculados de forma direta pela seguinte fórmula. É necessário notar que para que a resolução seja possível, o grau do polinômio do numerador, deve ser menor que o denominador.

$$A_n = \lim_{x \to r_n} ((x - r_n) * H(x))$$

O próximo exemplo será o cálculo de uma integral por frações parciais utilizando este método.

Exemplo:

$$\int \frac{x - \mathbf{2}}{(\boldsymbol{x} - \mathbf{3})(\boldsymbol{x} - \mathbf{1})} \, \boldsymbol{dx}$$

$$P(x) = \frac{A_{\mathbf{1}}}{x - 3} + \frac{A_{\mathbf{2}}}{x - 1}$$

$$\boldsymbol{A_1} = \lim_{\boldsymbol{x \to 3}} ((\boldsymbol{x} - \mathbf{3}) * \frac{\boldsymbol{x} - \mathbf{2}}{(\boldsymbol{x} - \mathbf{3})(\boldsymbol{x} - \mathbf{1})})$$

$$\boldsymbol{A_1} = \lim_{\boldsymbol{x \to 3}} \frac{\boldsymbol{x} - \mathbf{2}}{(\boldsymbol{x} - \mathbf{1})} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$$

$$\boldsymbol{A_2} = \lim_{\boldsymbol{x \to 1}} \left((\boldsymbol{x} - \mathbf{1}) * \frac{\boldsymbol{x} - \mathbf{2}}{(\boldsymbol{x} - \mathbf{3})(\boldsymbol{x} - \mathbf{1})} \right)$$

$$\boldsymbol{A_1} = \lim_{\boldsymbol{x \to 1}} \frac{\boldsymbol{x} - \mathbf{2}}{(\boldsymbol{x} - \mathbf{3})} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$$

Passo 1: Fatorar (já está fatorado) e aplicar a fórmula.

$$\int \frac{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}}{\boldsymbol{x} - \mathbf{3}} + \frac{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}}{\boldsymbol{x} - \mathbf{1}} \, \boldsymbol{dx}$$

$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \int \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x} - \mathbf{3}} \boldsymbol{dx} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \int \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x} - \mathbf{1}} \boldsymbol{dx}$$

Passo 2: Substituindo os coeficientes. Separamos em duas integrais.

As integrais separadas são de fácil resolução e podem ser resolvidas por métodos como o da substituição.
$$\boldsymbol{F(x) = \frac{1}{2}ln(x-3) + \frac{1}{2}ln(x-1)}$$

Quaisquer dúvidas referentes a matéria, não hesitar em procurar o monitor ou o professor!

E-mail para contato: fabio.menslin@gmail.com
Facebook: fabio.menslin
Whatsapp: meu celular está morto.